Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Un cuerpo que se encuentra en un campo gravitatorio se mueve entre dos puntos A y B de una superficie equipotencial. ¿Qué trabajo realiza la fuerza gravitatoria para mover el cuerpo entre A y B? Si la energía potencial del cuerpo en B es de -800 J y seguidamente pasa del punto B a un punto C, donde su energía potencial es de -1000 J, discute si su energía cinética es mayor en B o en C.

Solución:

Datos proporcionados:

- Energía potencial en el punto B: $E_p(B) = -800$ J.
- Energía potencial en el punto C: $E_p(C) = -1000$ J.

Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial gravitatorio tiene el mismo valor en todos sus puntos. Por lo tanto, en una superficie equipotencial, el potencial gravitatorio en A es igual al de B:

$$V_A = V_B.$$

Dado que la energía potencial gravitatoria E_p está relacionada con el potencial V por:

$$E_p = m \cdot V,$$

donde m es la masa del cuerpo, y como $V_A = V_B$, entonces:

$$E_p(A) = E_p(B).$$

La fuerza gravitatoria es una fuerza conservativa, lo que implica que el trabajo realizado por esta fuerza al mover un cuerpo entre dos puntos depende únicamente de los potenciales en esos puntos. El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria W_c se relaciona con la variación de la energía potencial:

$$W_c = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A)) = -(0) = 0 \text{ J}.$$

La energía potencial cambia de B a C:

$$\Delta E_p = E_p(C) - E_p(B) = -1000 \text{ J} - (-800 \text{ J}) = -200 \text{ J}.$$

Aplicando la relación entre el trabajo realizado por una fuerza conservativa y la variación de energía potencial:

$$W_c = -\Delta E_p = -(-200 \text{ J}) = +200 \text{ J}.$$

En ausencia de fuerzas no conservativas, la energía mecánica total se conserva:

$$\Delta E_{\text{mecánica}} = \Delta E_c + \Delta E_p = 0,$$

donde:

$$\Delta E_c = E_c(C) - E_c(B).$$

Sustituyendo:

$$E_c(C) - E_c(B) + (-200 \text{ J}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_c(C) = E_c(B) + 200 \text{ J}.$$

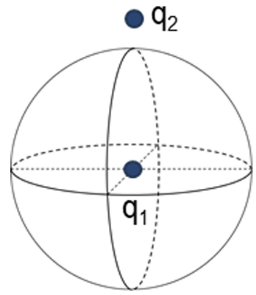
La energía cinética en el punto C es mayor que en el punto B en 200 J. Así, el cuerpo tiene una energía cinética mayor en C que en B.

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al mover el cuerpo entre A y B es cero. y la energía cinética del cuerpo es mayor en el punto C que en el punto B.

Cuestión 2. Campo Electromagnético

Enuncia el teorema de Gauss para el campo eléctrico. Determina el flujo eléctrico a través de la superficie cerrada de la figura. Las cargas son $q_1 = 8,85$ pC y $q_2 = -2q_1$ y se encuentran en el vacío.

Dato: constante dieléctrica del vacío, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ C^2/N $\cdot$ m^2



Solución:

El *Teorema de Gauss* para el campo eléctrico establece que el flujo eléctrico total Φ_E que atraviesa una superficie cerrada S es igual a la carga neta Q_{enc} encerrada dentro de esa superficie dividida por la constante dieléctrica del vacío ϵ_0. Matemáticamente, se expresa como:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

donde:

- $\vec{E}$ es el campo eléctrico,
- $d\vec{S}$ es un elemento diferencial de la superficie S, orientado hacia afuera,
- Q_{enc} es la carga neta encerrada dentro de la superficie S.

En el problema, tenemos dos cargas puntuales:

$$q_1 = 8,85 \text{ pC} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C} \qquad \text{y} \qquad q_2 = -2q_1.$$

Asumimos que la superficie cerrada en cuestión solo encierra la carga q_1 y que q_2 se encuentra fuera de dicha superficie. Por lo tanto, la carga neta encerrada es:

$$Q_{\text{enc}} = q_1 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}.$$

Aplicando el Teorema de Gauss:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

Por lo tanto, el flujo eléctrico a través de la superficie cerrada es:

$$\boldsymbol{\Phi_E = 1 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}}$$

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Considera una espira conductora plana sobre la superficie del papel. Esta se encuentra en el seno de un campo magnético uniforme de módulo $B = 1$ T, que es perpendicular al papel y con sentido saliente. Aumentamos la superficie de la espira de 2 cm^2 a 4 cm^2 en 10 s, sin que deje de ser plana y perpendicular al campo. Calcula la variación de flujo magnético y la fuerza electromotriz media inducida en la espira. Justifica e indica claramente con un dibujo el sentido de la corriente eléctrica inducida.

Solución:

Para resolver este ejercicio, aplicaremos las leyes de la inducción electromagnética, específicamente la Ley de Faraday-Henry y la Ley de Lenz:

- *Ley de Faraday-Henry*: La tensión inducida en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera con el circuito como borde.
- *Ley de Lenz*: El sentido de la corriente eléctrica inducida es tal que el campo magnético generado por la corriente se opone a la variación del flujo que la produjo.

La fuerza electromotriz ($\mathcal{E}$) inducida se calcula mediante la fórmula:

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

donde $\Delta\Phi$ es la variación del flujo magnético y Δt es el intervalo de tiempo. El flujo magnético (Φ) está dado por:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\alpha)$$

Dado que el campo magnético es perpendicular al plano de la espira, $\alpha = 0°$ y $\cos(0°) = 1$. Por lo tanto:

$$\Phi = B \cdot S.$$

La variación de la superficie es:

$$\Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}} = 4\ \text{cm}^2 - 2\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2.$$

Entonces, la variación del flujo magnético es:

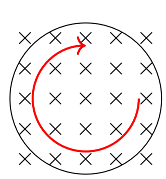
$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta S = 1\ \text{T} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}.$$

Calculamos la fuerza electromotriz media inducida ($\mathcal{E}$):

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{10\ \text{s}} = -2 \cdot 10^{-5}\ \text{V}.$$

El signo negativo indica, según la Ley de Lenz, que la corriente inducida se opone a la variación del flujo magnético.

Dado que el flujo magnético está aumentando en dirección saliente del papel, la corriente inducida generará un campo magnético entrante para oponerse a este aumento. Utilizando la regla de la mano derecha, determinamos que la corriente debe circular en sentido horario.

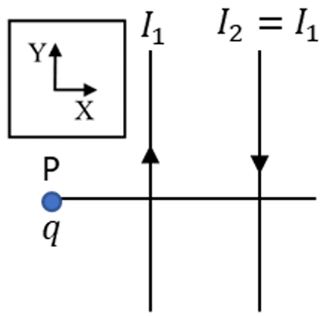


Sentido horario

Por lo tanto, la variación del flujo magnético es $\Delta\Phi = -2 \cdot 10^{-4}$ Wb y la fuerza electromotriz media inducida en la espira es $\mathcal{E}_{\text{media}} = -2 \cdot 10^{-5}$ V. La corriente inducida circula en sentido horario, generando un campo magnético que se opone al aumento del flujo saliente.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

La figura muestra dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos entre sí, por los que circulan corrientes eléctricas del mismo valor ($I_1 = I_2$) y de sentidos contrarios. Indica la dirección y sentido del campo magnético total en el punto P. Si en el punto P se tiene una carga $q > 0$, con velocidad perpendicular al plano XY, ¿qué fuerza magnética recibe dicha carga? Responde razonada y claramente las respuestas.



Solución:

Para resolver este ejercicio, utilizaremos la Ley de Biot-Savart para determinar el campo magnético generado por cada conductor y luego aplicaremos el principio de superposición para obtener el campo magnético total en el punto P. Posteriormente, emplearemos la Ley de Lorentz para calcular la fuerza magnética que actúa sobre la carga q en movimiento.

La Ley de Biot-Savart nos indica que un conductor rectilíneo por el que circula una corriente eléctrica genera un campo magnético de módulo:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r},$$

donde:

- B es el campo magnético,
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T $\cdot$ m/A es la permeabilidad del vacío,
- I es la corriente eléctrica,
- r es la distancia al punto donde se calcula el campo.

La dirección del campo magnético generado por un conductor rectilíneo se determina mediante la regla de la mano derecha: si el pulgar apunta en la dirección de la corriente, los dedos envueltos indican la dirección del campo magnético. En este caso, tenemos dos conductores paralelos con corrientes de igual magnitud pero de sentidos contrarios:

$$I_1 = I_2 = I.$$

- Para el conductor I_1, cuya corriente está dirigida hacia arriba, aplicando la regla de la mano derecha, el campo magnético en el punto P será saliente del plano (positivo en el eje Z).
- Para el conductor I_2, cuya corriente está dirigida hacia abajo, el campo magnético en el punto P será entrante al plano (negativo en el eje Z).

El campo magnético total en el punto P es la suma vectorial de los campos magnéticos generados por cada conductor:

$$B_{\text{total}} = B_1 + B_2.$$

Sustituyendo los valores de cada campo:

$$B_{\text{total}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_1} \cdot \vec{k} - \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_2} \cdot \vec{k} = \left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right) \cdot \vec{k} \text{ T}.$$

Dado que $r_1 < r_2$ y ambas corrientes tienen igual magnitud pero sentidos opuestos, el campo magnético total en el punto P estará dirigido positivamente a lo largo del eje Z.

La fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento en un campo magnético se calcula mediante la Ley de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}),$$

donde:

- $\vec{F}_m$ es la fuerza magnética,
- q es la carga eléctrica,
- $\vec{v}$ es la velocidad de la carga,
- $\vec{B}$ es el campo magnético.

Dado que la velocidad $\vec{v}$ de la carga es perpendicular al plano XY, asumimos que $\vec{v}$ está dirigida en la dirección del eje Z:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{k}.$$

Y el campo magnético total en el punto P está dirigido en la dirección positiva del eje Z:

$$\vec{B}_{\text{total}} = B \cdot \vec{k}.$$

Calculando el producto vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (v \cdot \vec{k}) \times (B \cdot \vec{k}) = v \cdot B \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = v \cdot B \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Entonces, la fuerza magnética es:

$$\vec{F}_m = \vec{0} \text{ N}.$$

Por lo tanto, el campo magnético total en el punto P está dirigido positivamente a lo largo del eje Z. La carga $q > 0$, con velocidad perpendicular al plano XY, recibe una fuerza magnética nula, pues los vectores campo magnético y velocidad son paralelos.

Cuestión 5. Ondas

Considera una onda trasversal en una cuerda descrita por $y(x,t) = 0,01\cos[2\pi(10t - x)]$ m, donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcula la velocidad de vibración en función de x y t. Dado el punto de la cuerda situado en $x_1 = 0,75$ m, encuentra un punto x_2, que en un mismo instante t, tenga la misma velocidad de vibración que x_1 y el mismo valor y. Indica el razonamiento seguido.

Solución:

La velocidad de vibración $v(x,t)$ se obtiene derivando la función de desplazamiento $y(x,t)$ respecto al tiempo t:

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[0,01\cos(2\pi(10t - x))\right] = -0,01 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot \sin(2\pi(10t - x)) \text{ m/s} = -0,2\pi \cdot \sin(20\pi t - 2\pi x) \text{ m/s}.$$

Para que dos puntos x_1 y x_2 tengan el mismo desplazamiento y y la misma velocidad v en el mismo instante t, deben vibrar en fase. Esto ocurre si están separados por un múltiplo entero de la longitud de onda λ. Primero, determinamos la longitud de onda λ:

$$k = 2\pi \text{ rad/m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ m}.$$

Dado $x_1 = 0,75$ m, buscamos x_2 tal que:

$$x_2 = x_1 + n\lambda,$$

donde n es un número entero. Para el punto más cercano, tomamos $n = 1$:

$$x_2 = 0,75 \text{ m} + 1 \text{ m} = 1,75 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la velocidad de vibración en función de x y t es:

$$\boldsymbol{v(x,t) = -0,2\pi \cdot \sin(20\pi t - 2\pi x)} \textbf{ m/s},$$

y ,dado el punto $x_1 = 0,75$ m, el punto x_2 que en el mismo instante t tiene la misma velocidad de vibración y el mismo desplazamiento es:

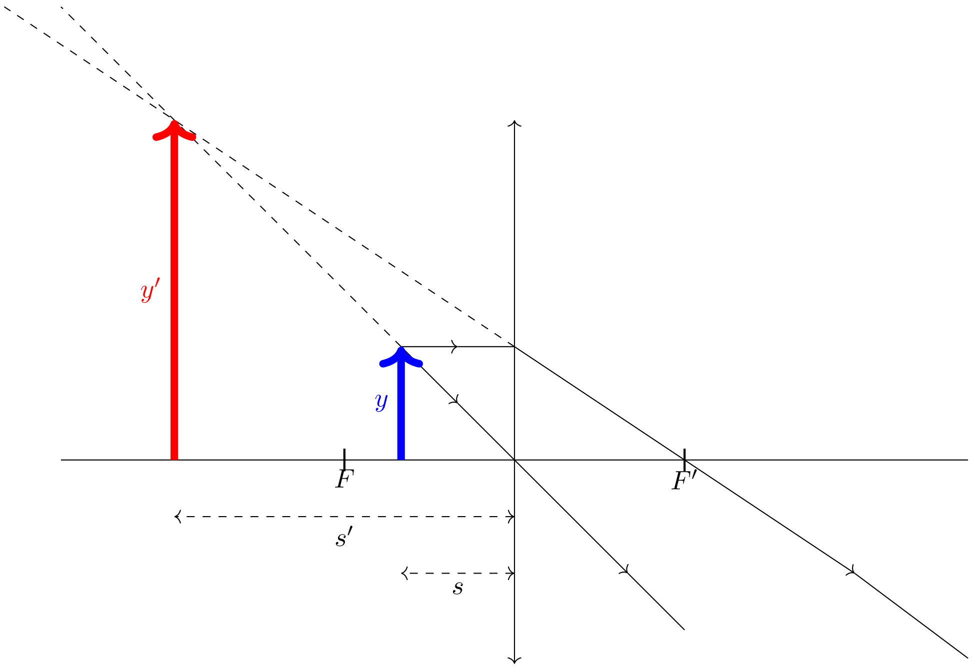
$$\boldsymbol{x_2 = 1,75} \textbf{ m.}$$

Cuestión 6. Óptica

La figura muestra un objeto y su imagen a través de una cierta lente interpuesta entre el objeto y el observador. Especifica las características de la imagen que se aprecian en la figura, en relación con el objeto. Indica qué tipo de lente es y realiza un trazado de rayos que explique lo que se muestra en la figura.

Solución:

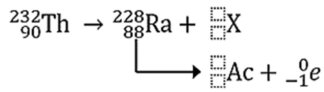
Observando la figura, se aprecia que las letras del objeto aumentan de tamaño al pasar por la lente. Esto indica que la lente está actuando como una lupa, lo que sugiere que es una lente convergente. Además, la imagen obtenida es derecha, lo que implica que es una imagen virtual. Según las características de las lentes, una imagen virtual y derecha se forma cuando el objeto se encuentra situado dentro de la distancia focal de una lente convergente. A continuación, se presenta un trazado de rayos que explica la formación de la imagen observada:



Por lo tanto, la lente es convergente, y la imagen formada es virtual, derecha y ampliada, lo que confirma que el objeto está situado dentro de la distancia focal de la lente.

Cuestión 7. Física Moderna

Completa, razonando la resolución, los números atómico y másico del núcleo X y del núcleo Ac en la serie radiactiva indicada. Identifica X. ¿Cómo se llama el tipo de desintegración que da lugar a este núcleo? ¿Cómo se llama el tipo de desintegración que da lugar a la partícula ${}^{0}_{-1}e$?



Solución:

Para resolver este ejercicio, completaremos la serie radiactiva utilizando las leyes de conservación de masa y carga, conocidas como las leyes de Soddy. Primero, consideremos la desintegración del ${}^{232}_{90}Th$ (Torio-232). La reacción se puede expresar de la siguiente manera:

$$ {}^{232}_{90}Th \rightarrow {}^{228}_{88} Ra + {}^{4}_{2} X. $$

Aplicando las leyes de conservación:

$$ \begin{cases} A_{\text{Th}} = A_{\text{Ra}} + A_X \\ Z_{\text{Th}} = Z_{\text{Ra}} + Z_X \end{cases} $$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$ \begin{cases} 232 = 228 + A_X \\ 90 = 88 + Z_X \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_X = 4 \\ Z_X = 2 \end{cases} $$

Por lo tanto, la partícula X es:

$$ {}^{4}_{2}He. $$

Esta partícula es conocida como *partícula alfa*.

Continuamos con la siguiente desintegración:

$$ {}^{228}_{88}Ra \rightarrow {}^{228}_{89} Ac + {}^{0}_{-1} e. $$

Aplicando nuevamente las leyes de conservación:

$$ \begin{cases} A_{\text{Ra}} = A_{\text{Ac}} + A_e \\ Z_{\text{Ra}} = Z_{\text{Ac}} + Z_e \end{cases} $$

Sustituyendo los valores:

$$ \begin{cases} 228 = 228 + 0 \\ 88 = 89 + (-1) \end{cases} $$

De esto se deduce que el núcleo Ac es:

$$ {}^{228}_{89}Ac. $$

La partícula emitida ${}^{0}_{-1}e$ es un *electrón*, conocida como *partícula beta*.

Por lo tanto, la solución es:

- **El núcleo X tiene número atómico $Z_X = 2$ y número másico $A_X = 4$, correspondiendo a la partícula alfa ${}^{4}_{2}He$.**
- **El núcleo Ac tiene número atómico $Z_{Ac} = 89$ y número másico $A_{Ac} = 228$, correspondiendo a Actinio-228.**
- **La desintegración que da lugar al núcleo X es una desintegración alfa.**
- **La desintegración que da lugar a la partícula ${}^{0}_{-1}e$ es una desintegración beta.**

Cuestión 8. Física Moderna

Una astronauta se encuentra en una nave espacial que se mueve a una velocidad $v = 0,5c$ respecto a la Tierra (c es la velocidad de la luz en el vacío). En un cierto momento comunica a la base en la Tierra que va a dormir desde las 13 h hasta las 19 h, según los relojes de la nave. Calcula a qué hora se despertará, según los relojes de la Tierra (todos los relojes se sincronizan a las 13 h). Justifica adecuadamente tu respuesta.

Solución:

Para resolver este ejercicio, utilizaremos el concepto de dilatación del tiempo según la teoría de la relatividad especial de Einstein. La dilatación del tiempo indica que el tiempo transcurre más lentamente en un sistema en movimiento respecto a uno en reposo. La relación entre el tiempo medido en la Tierra (Δt_{Tierra}) y el tiempo medido en la nave espacial (Δt_{nave}) está dada por la fórmula:

$$\Delta t_{\text{Tierra}} = \gamma \cdot \Delta t_{\text{nave}},$$

donde el factor de Lorentz (γ) se calcula como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sustituyendo el valor de la velocidad de la nave espacial ($v = 0,5c$):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,25}} = 1,1547.$$

La astronauta planea dormir durante $\Delta t_{\text{nave}} = 19 \text{ h} - 13 \text{ h} = 6$ horas, según los relojes de la nave. Aplicando la fórmula de dilatación del tiempo:

$$\Delta t_{\text{Tierra}} = 1,1547 \cdot 6 \text{ h} = 6,9282 \text{ horas}.$$

Para convertir el tiempo decimal a horas, minutos y segundos:

$$0,9282 \text{ horas} \cdot 60 \ \frac{\text{minutos}}{\text{hora}} = 55,692 \text{ minutos},$$

$$0,692 \text{ minutos} \cdot 60 \ \frac{\text{segundos}}{\text{minuto}} = 41,52 \text{ segundos}.$$

Entonces, $\Delta t_{\text{Tierra}} = 6$ horas 55 minutos 42 segundos. Sumando este tiempo al momento en que los relojes de la Tierra están sincronizados a las 13 h:

$$13 \text{ h} + 6 \text{ h } 55 \text{ min } 42 \text{ s} = 19 \text{ h } 55 \text{ min } 42 \text{ s}.$$

Por lo tanto, la astronauta se despertará a las 19 h, 55 minutos y 42 segundos según los relojes de la Tierra.

Problema 1. Campo Gravitatorio

La masa del planeta K2-72 es $2,21$ veces la masa de la Tierra y su radio es $1,29$ veces el radio de la Tierra.

a) **¿Cuál es el valor de la intensidad de campo gravitatorio en la superficie de K2-72? ¿Cuál es la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie?**

b) **Determina la distancia desde el centro de K2-72 para la cual la intensidad de campo gravitatorio es $0,16$ veces el valor en su superficie. Deduce y calcula la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia.**

Dato: campo gravitatorio de la Tierra en su superficie, $g_0 = 9,8$ m/s^2; radio terrestre, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m

Solución:

a) **¿Cuál es el valor de la intensidad de campo gravitatorio en la superficie de K2-72? ¿Cuál es la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie?**

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie de un planeta se calcula mediante la fórmula:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2},$$

donde:
- $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2 es la constante de gravitación universal,
- M es la masa del planeta,
- R es el radio del planeta.

Dado que la masa de K2-72 es $2,21$ veces la masa de la Tierra ($M_{\text{Tierra}} = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg) y su radio es $1,29$ veces el radio de la Tierra ($R_{\text{Tierra}} = 6,37 \cdot 10^6$ m), tenemos:

$$M_{\text{K2-72}} = 2,21 \cdot M_{\text{Tierra}} = 2,21 \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 1,31837 \cdot 10^{25} \text{ kg},$$

$$R_{\text{K2-72}} = 1,29 \cdot R_{\text{Tierra}} = 1,29 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} = 8,2113 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la gravedad:

$$g_{\text{K2-72}} = \frac{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,31837 \cdot 10^{25} \text{ kg}}{(8,2113 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 13,04 \text{ m/s}^2.$$

Entonces, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de K2-72 es $13,04$ m/s^2. Ahora, la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie se calcula mediante:

$$F = m \cdot g,$$

donde $m = 70$ kg y $g = 13,04$ m/s^2:

$$F = 70 \text{ kg} \cdot 13,04 \text{ m/s}^2 = 912,8 \text{ N}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de K2-72 es $13,04$ m/s^2 y la fuerza gravitatoria que K2-72 ejerce sobre una persona de 70 kg en reposo sobre su superficie es $912,8$ N.

b) **Determina la distancia desde el centro de K2-72 para la cual la intensidad de campo gravitatorio es $0,16$ veces el valor en su superficie. Deduce y calcula la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia.**

Queremos determinar la distancia r desde el centro de K2-72 tal que la intensidad del campo gravitatorio a esa distancia sea $0,16$ veces el valor en su superficie:

$$g(r) = 0,16 \cdot g_{\text{K2-72}}.$$

La intensidad del campo gravitatorio a una distancia r de un cuerpo de masa M es:

$$g(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}.$$

Así, tenemos:

$$\frac{G \cdot M}{r^2} = 0,16 \cdot \frac{G \cdot M}{R^2}.$$

Cancelando $G \cdot M$ en ambos lados:

$$\frac{1}{r^2} = 0,16 \cdot \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{R^2}{0,16} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{0,16}} = \frac{R}{0,4} = 2,5 \cdot R,$$

donde $R = R_{\text{K2-72}} = 8,2113 \cdot 10^6$ m. Entonces,

$$r = 2,5 \cdot 8,2113 \cdot 10^6 \text{ m} = 2,0528 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

A continuación, calculamos la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia. La velocidad orbital se calcula mediante:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N.} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,31837 \cdot 10^{25} \text{ kg}}{2,0528 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 6,55 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la distancia desde el centro de K2-72 para la cual la intensidad de campo gravitatorio es $\mathbf{0,16}$ veces el valor en su superficie es $\mathbf{2,05 \cdot 10^7}$ m y la velocidad que tendría un satélite en órbita circular a dicha distancia es aproximadamente $\mathbf{6,55 \cdot 10^3}$ m/s.

Problema 2. Campo Electromagnético

Sean dos cargas puntuales de valores $q_1 = 2\ \mu$C y $q_2 = -1,6\ \mu$C situadas en los puntos A (0, 0) m y B (0, 3) m, respectivamente. Calcula:

a) **El vector campo eléctrico creado por cada una de las dos cargas y el vector campo eléctrico total en el punto C (4, 3) m.**

b) **El trabajo que realiza el campo al trasladar una carga $q_3 = -1$ nC desde C hasta un punto D donde la energía potencial electrostática de dicha carga vale $-1,62\ \mu$J.**

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N $\cdot$ m^2/C^2

Solución:

a) **El vector campo eléctrico creado por cada una de las dos cargas y el vector campo eléctrico total en el punto C (4, 3) m.**

Para resolver este apartado, calcularemos el campo eléctrico generado por cada carga en el punto C y luego sumaremos vectorialmente ambos campos utilizando el principio de superposición. La carga $q_1 = 2\ \mu\text{C} = 2 \cdot 10^{-6}$ C está situada en el punto A (0, 0) m. El vector posición desde A hasta C es:

$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (4-0)\ \vec{i} + (3-0)\ \vec{j} = 4\ \vec{i} + 3\ \vec{j}\ \text{m}.$$

La distancia desde q_1 hasta C es:

$$r_1 = |\vec{r}_{AC}| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}\ \text{m} = 5\ \text{m}.$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}_{AC}$ es:

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_1} = \frac{4\ \vec{i} + 3\ \vec{j}}{5} = 0,8\ \vec{i} + 0,6\ \vec{j}.$$

El campo eléctrico generado por q_1 en C es:

$$\vec{E}_1 = \frac{k \cdot q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = \frac{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(5\ \text{m})^2} \cdot (0,8\ \vec{i} + 0,6\ \vec{j}) = 576\ \vec{i} + 432\ \vec{j}\ \text{N/C}.$$

La carga $q_2 = -1,6\ \mu\text{C} = -1,6 \cdot 10^{-6}$ C está situada en el punto B (0, 3) m. El vector posición desde B hasta C es:

$$\vec{r}_{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (4-0)\ \vec{i} + (3-3)\ \vec{j} = 4\ \vec{i}\ \text{m}.$$

La distancia desde q_2 hasta C es:

$$r_2 = |\vec{r}_{BC}| = \sqrt{(4)^2}\ \text{m} = 4\ \text{m}.$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}_{BC}$ es:

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_{BC}}{r_2} = \frac{4\ \vec{i}}{4} = 1\ \vec{i}.$$

El campo eléctrico generado por q_2 en C es:

$$\vec{E}_2 = \frac{k \cdot q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = \frac{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-6}\ \text{C})}{(4\ \text{m})^2} \cdot (1\ \vec{i}) = -900\ \vec{i}\ \text{N/C}.$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (576\ \vec{i} + 432\ \vec{j}) + (-900\ \vec{i}) = (-324\ \vec{i} + 432\ \vec{j})\ \text{N/C}.$$

Por lo tanto, el vector campo eléctrico total en el punto C es:

$$\boldsymbol{\vec{E} = -324\ \vec{i} + 432\ \vec{j}\ \text{N/C}.}$$

b) El trabajo que realiza el campo al trasladar una carga $q_3 = -1$ nC desde C hasta un punto D donde la energía potencial electrostática de dicha carga vale $-1,62$ μJ.

La carga es $q_3 = -1 \text{ nC} = -1 \cdot 10^{-9}$ C. El trabajo realizado por el campo eléctrico al mover una carga desde un punto C hasta un punto D es igual a la diferencia de energía potencial electrostática entre los dos puntos:

$$W = -\Delta E_p = E_{p,C} - E_{p,D}.$$

Según el enunciado, la energía potencial electrostática de q_3 en el punto D es:

$$E_{p,D} = -1,62 \ \mu\text{J} = -1,62 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Primero, calcularemos la energía potencial electrostática de q_3 en el punto C. La energía potencial electrostática de una carga q en un punto es:

$$E_p = q \cdot V,$$

donde V es el potencial eléctrico en ese punto debido a todas las cargas. Calculamos el potencial eléctrico en el punto C:

$$V_C = V_{1C} + V_{2C}.$$

El potencial eléctrico debido a q_1 en C es:

$$V_{1C} = \frac{k \cdot q_1}{r_1} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{5 \text{ m}} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

El potencial eléctrico debido a q_2 en C es:

$$V_{2C} = \frac{k \cdot q_2}{r_2} = \frac{9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-6} \text{ C})}{4 \text{ m}} = -3,6 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

Entonces, el potencial total en C es:

$$V_C = 3,6 \cdot 10^3 \text{ V} - 3,6 \cdot 10^3 \text{ V} = 0 \text{ V}.$$

Por lo tanto, la energía potencial electrostática de q_3 en C es:

$$E_{p,C} = q_3 \cdot V_C = (-1 \cdot 10^{-9} \text{ C}) \cdot 0 \text{ V} = 0 \text{ J}.$$

Ahora, calculamos el trabajo realizado:

$$W = E_{p,C} - E_{p,D} = 0 \text{ J} - (-1,62 \cdot 10^{-6} \text{ J}) = 1,62 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 1,62 \ \mu\text{J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo al mover la carga q_3 desde C hasta D es de $1,62$ μJ.

Problema 3. Óptica

Un objeto se sitúa 10 cm a la izquierda de una lente de −5 dioptrías.

a) **Calcula la posición de la imagen. Dibuja un trazado de rayos, con la posición del objeto, la lente, los puntos focales y la imagen. Explica el tipo de imagen que se forma.**
b) **¿Qué distancia y hacia dónde habría que mover el objeto para que la imagen tenga 1/3 del tamaño del objeto y a derechas?**

Solución:

a) **Calcula la posición de la imagen. Dibuja un trazado de rayos, con la posición del objeto, la lente, los puntos focales y la imagen. Explica el tipo de imagen que se forma.**

Primero, calculamos la distancia focal (f') de la lente a partir de su potencia (P):

$$f' = \frac{1}{D}.$$

Dado que la potencia es $P = -5$ dioptrías, tenemos:

$$f' = \frac{1}{-5 \text{ dioptrías}} = -0,20 \text{ m} = -20 \text{ cm}.$$

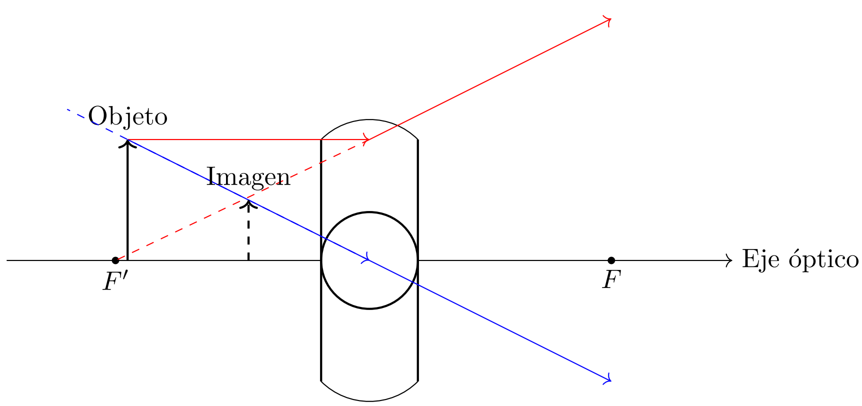
La distancia focal negativa indica que la lente es *divergente*. Ahora, utilizamos la ecuación de las lentes delgadas para calcular la posición de la imagen (s'):

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s},$$

donde $f' = -20$ cm es la distancia focaly $s = -10$ cm es la distancia desde el objeto a la lente (negativa porque el objeto está a la izquierda de la lente). Sustituyendo los valores:

$$\frac{1}{-20 \text{ cm}} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{-10 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad s' = -\frac{20}{3} \text{ cm} = -6,67 \text{ cm}.$$

La imagen se forma a $6,67$ cm a la izquierda de la lente (el signo negativo indica que está en el mismo lado que el objeto). El trazado de rayos es:



Nótese que la imagen es *virtual* (porque s' es negativa), es *derecha* (no está invertida) y es *reducida* (el tamaño es menor que el del objeto).

Por lo tanto, la imagen se forma a 6,67 cm a la izquierda de la lente

b) ¿Qué distancia y hacia dónde habría que mover el objeto para que la imagen tenga 1/3 del tamaño del objeto y a derechas?

El aumento lateral (A_L) está dado por:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}.$$

Según el enunciado, queremos que:

$$A_L = \frac{1}{3}.$$

Entonces,

$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{s}{3}.$$

Usando la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Sustituimos $s' = \frac{s}{3}$ y $f' = -20$ cm:

$$\frac{1}{-20} = \frac{1}{\frac{s}{3}} - \frac{1}{s} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s} = \frac{2}{s} \quad \Rightarrow \quad s = -40 \text{ cm}.$$

El objeto debe estar a $s = -40$ cm (a la izquierda de la lente). Dado que inicialmente estaba a $s_0 = -10$ cm, debemos mover el objeto:

$$\Delta s = s - s_0 = (-40 \text{ cm}) - (-10 \text{ cm}) = -30 \text{ cm}.$$

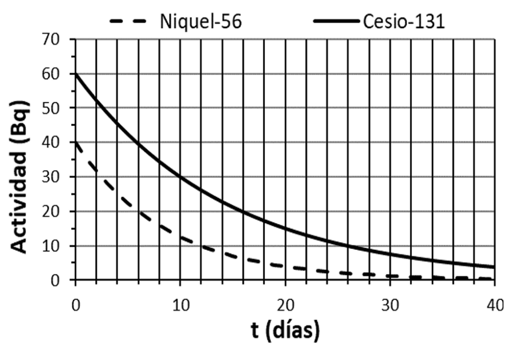
Es decir, el objeto debe moverse 30 cm hacia la izquierda.

Por lo tanto, para obtener una imagen derecha y de tamaño 1/3 del objeto, debemos mover el objeto 30 cm hacia la izquierda, colocándolo a 40 cm a la izquierda de la lente.

Problema 4. Física Moderna

a) **Define periodo de semidesintegración. A la vista de la figura, calcula el periodo de semidesintegración del ^{56}Ni y razona si es mayor o menor que el del ^{131}Cs. ¿Qué tiempo debe pasar para que el número de núcleos de ^{131}Cs disminuya un 75%?**
b) **Si la masa inicial de ^{56}Ni es de 10^{-3} pg, determina el número de núcleos que quedan sin desintegrar a los 15 días.**

Dato: masa de un núcleo de ^{56}Ni: $93 \cdot 10^{-24}$ g



Solución:

a) **Define periodo de semidesintegración. A la vista de la figura, calcula el periodo de semidesintegración del ^{56}Ni y razona si es mayor o menor que el del ^{131}Cs. ¿Qué tiempo debe pasar para que el número de núcleos de ^{131}Cs disminuya un 75%?**

El *periodo de semidesintegración* ($T_{1/2}$) es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de los núcleos radiactivos presentes en una muestra. Es decir, es el tiempo necesario para que el número de núcleos inicial N_0 se reduzca a $N = \dfrac{N_0}{2}$.

A partir de la gráfica proporcionada, podemos determinar el periodo de semidesintegración de ^{56}Ni observando el tiempo que transcurre hasta que su actividad se reduce a la mitad. Si la actividad inicial es A_0, entonces cuando $A = \dfrac{A_0}{2}$, el tiempo transcurrido es el periodo de semidesintegración.

Para el ^{56}Ni:
- Actividad inicial: $A_0 = 40$ Bq.
- Actividad reducida a la mitad: $A = 20$ Bq.

De la gráfica, observamos que la actividad del ^{56}Ni se reduce a 20 Bq a los 6 días. Por lo tanto, el periodo de semidesintegración del ^{56}Ni es:

$$T_{1/2}^{\text{Ni}} = 6 \text{ días}.$$

Para el ^{131}Cs:
- Actividad inicial: $A_0 = 60$ Bq.
- Actividad reducida a la mitad: $A = 30$ Bq.

De la gráfica, observamos que la actividad del ^{131}Cs se reduce a 30 Bq a los 10 días. Por lo tanto, el periodo de semidesintegración del ^{131}Cs es:

$$T_{1/2}^{\text{Cs}} = 10 \text{ días}.$$

Comparando ambos periodos:

$$T_{1/2}^{\text{Ni}} = 6 \text{ días} < T_{1/2}^{\text{Cs}} = 10 \text{ días}.$$

Entonces, el periodo de semidesintegración del ^{56}Ni es menor que el del ^{131}Cs.

Para que el número de núcleos de ^{131}Cs disminuya un 75%, debe quedar el 25% de los núcleos iniciales, es decir:

$$\frac{N}{N_0} = 0,25.$$

Sabemos que la desintegración radiactiva sigue la ley:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

donde λ es la constante radiactiva y t es el tiempo transcurrido. Relacionando la constante de desintegración con el periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\left(\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\right)t}.$$

Para $\frac{N}{N_0} = 0,25$:

$$0,25 = e^{-\left(\frac{\ln 2}{10}\right)t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\ln 2}{\frac{\ln 2}{10}} = 20 \text{ días}.$$

Entonces, deben transcurrir 20 días para que el número de núcleos de ^{131}Cs disminuya un 75%.

Por lo tanto, el periodo de semidesintegración del ^{56}Ni es menor que el del ^{131}Cs y deben transcurrir 20 días para que el número de núcleos de ^{131}Cs disminuya un 75%.

b) Si la masa inicial de ^{56}Ni es de 10^{-3} pg, determina el número de núcleos que quedan sin desintegrar a los 15 días.

Primero, calculamos el número inicial de núcleos (N_0) de ^{56}Ni a partir de la masa inicial:

$$m_0 = 10^{-3} \text{ pg} = 10^{-3} \text{ pg} \times \frac{1 \text{ g}}{10^{12} \text{ pg}} = 10^{-15} \text{ g}.$$

La masa de un núcleo de ^{56}Ni es:

$$m_{\text{Ni}} = 93 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

El número inicial de núcleos es:

$$N_0 = \frac{m_0}{m_{\text{Ni}}} = \frac{10^{-15} \text{ g}}{93 \cdot 10^{-24} \text{ g}} = 1,075 \cdot 10^7 \text{ núcleos}.$$

Ahora, utilizamos la ley de desintegración radiactiva para calcular el número de núcleos que quedan después de $t = 15$ días:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

donde λ es:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{6 \text{ días}}.$$

Sustituimos los valores:

$$N = N_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{6}\right)15} = 1,9 \cdot 10^6 \text{ núcleos.}$$

Por lo tanto, después de 15 días, quedan sin desintegrar aproximadamente $\mathbf{1,9 \cdot 10^6}$ núcleos de $\mathbf{^{56}Ni}$.